Centrale Méditerranée

Mathématique numérique et simulation

Notes de cours

Marie Billaud-Friess

Electif 2A, ECM **2024–2025**

☞ Attention. Ce polycopié est régulièrement mis à jour et corrigé. Si vous découvrez des erreurs, n'hésitez pas à me les communiquer. Toutes les remarques ou questions permettant d'en améliorer le contenu peuvent être envoyées par mail à l'adresse ci-dessous.

Dernière mise à jour : 3 décembre 2024

Marie Billaud-Friess
marie.billaud_friess@centrale-med.fr

Centrale Méditerranée
Institut de Mathématiques de Marseille

Table des matières

1 Processus stochastiques **1**
1.1 Généralités sur les processus stochastiques . . . 1
1.1.1 Définitions . . . 1
1.1.2 Mesurabilité . . . 2
1.1.3 Loi de probabilité . . . 2
1.2 Les processus gaussiens . . . 2
1.2.1 Processus du second ordre . . . 3
1.2.2 Loi normale et vecteurs gaussiens . . . 3
1.2.3 Processus gaussien . . . 4

2 Mouvement brownien **5**
2.1 Bref historique . . . 5
2.1.1 Définitions . . . 6
2.1.2 Variantes du mouvement brownien . . . 8
2.2 Simulation du mouvement brownien . . . 8
2.2.1 Discrétisation en temps . . . 8
2.2.2 Méthode de Cholesky . . . 9
2.2.3 Procédure progressive . . . 9
2.2.4 Décomposition de Karhunen-Loève . . . 10

3 Eléments du calcul stochastique **13**
3.1 Filtration et mesurablité . . . 13
3.2 Quelques éléments pour comprendre l'intégrale stochastique de Itō . . . 14
3.3 Formule de Itō . . . 16

4 Représentation probabiliste des EDP : exemple de l'équation de la chaleur **19**
4.1 Un résultat formel . . . 19
4.2 Une première formule de Feynman-Kac . . . 19
4.3 Stratégie numérique . . . 21

5 Notations et conventions **23**
5.1 Abbréviations . . . 23
5.2 Notations . . . 23
5.3 Tribus, variables aléatoires et espérance conditionnelle . . . 23

Chapitre 1

Processus stochastiques

1.1 Généralités sur les processus stochastiques

Dans ce chapitre, on donne les définitions principales concernant les processus stochastiques nécessaires à la compréhension du mouvement brownien, pour plus de détails voir e.g. [1].

1.1.1 Définitions

Dans la suite on notera $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités.

Définition 1.1.1 (Processus stochastique)**.** *Soient $I \subset \mathbb{R}$ et $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable. Un* **processus stochastique** *à valeurs dans E est défini sur $I \times \Omega$ par l'application*

$$\begin{array}{rccl} X: & I \times \Omega & \to & E \\ & (t, \omega) & \mapsto & X(t, \omega) = X_t(\omega). \end{array}$$

Par la suite, comme pour les variables aléatoires (v.a.), la dépendance en ω sera omise. Et on notera le processus stochastique comme $\{X(t), t \in I\}$ ou encore $\{X_t\}_{t \in I}$ voire plus simplement X.

On notera également.

- Le paramètre t est appelé **temps**.
- L'espace E est appelé **l'espace d'états**. En particulier, si $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ on parle de processus à valeurs entières ou si $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ on parlera de processus à valeurs réelles.
- I est un ensemble d'indices (intervalle, ou ensemble fini ou dénombrable). Si I est dénombrable (e.g. $I = \mathbb{N}$) on parle de processus à **temps discret** ou **suite aléatoire**. Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ (i.e. $I = [0, T], T > 0$ ou $I = \mathbb{R}_+$) on parle de processus à **temps continu** ou **fonction aléatoire**.
- Etant donnés $s < t$ de I, la différence $X_t - X_s$ est appelée **accroissement** du processus. Le processus X est dit à **accroissements indépendents** si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $(t_1, \ldots, t_n) \in I^n$ les variables aléatoires $X_{t_1} - X_0, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ sont indépendantes.

Définition 1.1.2 (Trajectoire d'un processus stochastique)**.** *Pour $\omega \in \Omega$ donné, la* **trajectoire** *d'un processus stochastique $\{X_t\}_{t \in I}$ est la fonction déterministe $X(\cdot, \omega)$ de I dans E donnée par $t \mapsto X(t, \omega)$ pour tout $t \in I$.*

Exemple 1.1.3.

1. *(nombre naissances) Le nombre de naissances sur une période $[0, T]$ est un processus stochastique N à temps continu défini sur $I = [0, T]$ et à valeurs entières $H = \mathbb{N}$. Le processus de Poisson permet de modéliser une telle situation en partant de $N_0 = 0$ alors $N_t \sim \mathcal{P}(\lambda t), \lambda > 0$.*
2. *(marche en temps) Une marche en temps X définie comme la somme des v.a. réelles $\{\xi_i\}_{i \geq 0}$ aux instants t_i de $\mathbb{T} = \{t_0, t_1, \ldots, t_n, \ldots\}$ est un processus à temps discret et à valeurs réelles $X_{t_i} = \sum_{j \leq i} \xi_j$, où $t_i \in \mathbb{T}$.*

Définition 1.1.4 (Processus stochastique à trajectoires continues)**. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle**. *Un processus stochastique $\{X_t\}_{t \in I}$ à temps continu est dit à* **trajectoires continues** *si la fonction $t \mapsto X(t, \omega)$ est continue pour tout $\omega \in \Omega$.*

Remarque. D'autres définitions de la continuité sont possibles, par exemple on ayant une continuité presque sûrement (i.e. p.p. $\omega \in \Omega$) ou encore continuité en moyenne quadratique (voir e.g. [3, §5.5]).

Exemple 1.1.5.

1. *Le processus de Poisson n'est pas à trajectoires continues (fonction en escalier).*

1.1.2 Mesurabilité

On pourra utiliser les deux definitions suivantes du processus stochastique.

Définition 1. Une variable aléatoire à valeurs dans E, pour $t \in I$ donné : $X_t : \omega \mapsto X(t, \omega)$.

Définition 2. Une variable aléatoire à valeurs dans E^I (applications de I dans E) : $X : \omega \to (X(t, \omega))_{t \in I}$.

pour peu que les notions de mesurabilité soient aussi bien définies, en particulier pour E^I.

Définition 1.1.6 (Tribu produit). *Pour $k \geq 1$, $t_1, \ldots, t_k \in I$ et $B_1, \ldots, B_k \in \mathcal{E}$, l'ensemble*

$$C(t_1, \ldots, t_k; B_1, \ldots, B_k) = \{(x_t)_{t \in I} \in E^I, x_{t_i} \in B_i, i = 1, \ldots, k\},$$

est appelé **cylindre**. *La* **tribu produit** *definie sur E^I est notée $\mathcal{E}^{\otimes I}$, et correspond à la plus petite tribu sur E^I contenant toutes les cylindres.*

Lemme 1.1.7 (Définitions équivalentes). *Soit $\{X_t\}_{t \in I}$, une famille de fonctions (v.a.) $X_t : \Omega \to E$. La fonction de Ω dans E $X_t : \omega \mapsto X(t, \omega)$, pour tout $t \in I$ est mesurable pour la tribu $\mathcal{E}$ pour $\mathcal{E}$* **si et seulement si** *la fonction de Ω dans E^I $X : \omega \mapsto (X(t, \omega))_{t \in I}$ est mesurable pour la tribu produit $\mathcal{E}^{\otimes I} := \bigotimes_{t \in I} \mathcal{E}$.*

Le lemme précédent, nous assure donc que les **Définitions 1&2** du processus X sont équivalentes.

1.1.3 Loi de probabilité

A la lumière des définitions précédentes, on peut désormais (au même titre que pour les v.a.) se poser la question de la définition de la loi d'un processus aléatoire.

Définition 1.1.8 (Loi d'un processus aléatoire). *On appelle* **loi du processus aléatoire** *X la mesure de probabilité $\mathbb{P}_X$ définie sur $\mathcal{E}^{\otimes I}$ par*

$$\mathbb{P}_X(A) := \mathbb{P}(X \in A), \qquad A \in \mathcal{E}^{\otimes I}.$$

La loi de X est déterminée[1] *par ses marginales fini-dimensionnelles i.e. la lois des vecteurs $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_k})$ avec $k \geq 1$ et $t_1, \ldots, t_k \in I$.*

Nous donnons dans la suite diverses definitions permettant de comparer deux processus en terme de loi et indépendance.

Définition 1.1.9. *Soient $X = \{X_t\}_{t \in I}$ et $Y = \{Y_t\}_{t \in J}$ deux processus stochastiques définis sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.*

i) Supposons $I = J$, les processus X et Y sont **égaux en loi** *(au sens de l'égalité en loi des lois marginales fini-dimensionnelles [1]), si pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $(t_1, \ldots, t_k) \in I^n$, les vecteurs aléatoires $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_k})$ et $(Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_k})$ ont la même loi dans E^k. Plus précisément, pour tout $B \in \underbrace{\mathcal{E} \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}}_{k \text{ times}}$ on a*

$$\mathbb{P}((X_{t_1}, \ldots, X_{t_k}) \in B) = \mathbb{P}((Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_k}) \in B).$$

ii) Les processus X et Y sont **indépendants** *si et seulement si $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ et $(Y_{s_1}, \ldots, Y_{s_m})$ sont indépendants pour tout $n, t_1, \ldots, t_n$ et $m, s_1, \ldots, s_m$. i.e. tous les vecteurs de dimension finis extraits de X et Y sont indépendants*[2].

1.2 Les processus gaussiens

Avant de donner la définition des processus gaussiens, nous donnons quelques définitions générales sur les processus du second ordre.

1. En effet, cela est intiment lié à la définition de la tribu produit. Voir [1, §1,2] pour plus de détails.
2. Cela signifie en d'autres termes que les tribus générées par les processus $\sigma(X_t, t \in I)$ et $\sigma(Y_t, t \in J)$ sont indépendantes [1, §1].

1.2.1 Processus du second ordre

Définition 1.2.1 (Processus du second ordre)**.** *Un processus stochastique est dit* **d'ordre 2 ou du second ordre** *si pour tout $t \in I$ on a X_t dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$* [3]*. On désigne par*

- *$m : I \to \mathbb{R}$ la fonction* **moyenne** *donnée par $m(t) = \mathbb{E}(X_t)$,*
- *$C : I \times I \to \mathbb{R}$ la fonction* **covariance** *donnée par $C(s,t) = \mathrm{cov}(X_t, X_s) = \mathbb{E}(X_t X_s) - \mathbb{E}(X_t)\mathbb{E}(X_s)$.*

Définition 1.2.2 (Fonction de type positif)**.** *Une fonction $C : I \times I \to \mathbb{R}$ est dite* **de type positif** *(ou positive) si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$*

$$\forall (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n \text{ et } \forall (t_1, \dots, t_n)^T \in I^n$$

on a

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j C(t_i, t_j) \geq 0.$$

Exemple 1.2.3. *Soit X un processus de second ordre, alors*

- *C est symétrique car $C(s,t) = \mathrm{cov}(X_t, X_s) = \mathrm{cov}(X_s, X_t) = C(t,s)$,*
- *C est de type positif en effet pour $(x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ et $(t_1, \dots, t_n)^T \in I^n$ on a*

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j C(t_i, t_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \mathrm{cov}(X_{t_i}, X_{t_j}) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i X_{t_i})(x_j X_{t_j})\right)$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}(x_i X_{t_i})\mathbb{E}(x_j X_{t_j}) = \mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i X_{t_i}\right)^2\right) - \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i X_{t_i}\right)^2 = \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i X_{t_i}\right) \geq 0.$$

1.2.2 Loi normale et vecteurs gaussiens

Dans cette partie nous discutons un exemple qui aura une importance capitale par la suite : les *processus gaussiens*. On rappelle pour commencer, quelques propriétés sur les variables et vecteurs gaussiens.

Une variable aléatoire $X \in \mathbb{R}$ est dite **gaussienne** ou suit **une loi normale**, si il existe $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma \neq 0$ tels que sa densité de probabilité $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est donnée par

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad x \in \mathbb{R},$$

et sa fonction caractéristique $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est définie par

$$\varphi(t) = \mathbb{E}(\exp(itX)) = \exp(i\mu t)\exp\left(-\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) \quad t \in \mathbb{R}.$$

On notera $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. De plus l'espérance est $\mathbb{E}(X) = \mu$ et la variance $\mathbb{V}(X) = \sigma^2$. Plus généralement, $X \in \mathrm{L}^p(\Omega), p \geq 1$. Les moments centrés sont nuls pour $q = 2k+1$ et pour $q = 2k$ on a $\mathbb{E}(|X-\mu|^q) = \frac{(2k)!}{2^k k!}\sigma^{2k}$, $k \geq 1$.

Proposition 1.2.4. *La v.a. X est la translation et la dilation d'une* **gaussienne standard** *$G \sim \mathcal{N}(0,1)$ t.q. $X = \mu + \sigma G$ pour tout $\mu \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}^*$.*

Démonstration. Voir ci-dessous pour le cas général. ■

On considère désormais, des variables aléatoires (vecteurs aléatoires) X à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, équipé du produit scalaire canonique noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de norme associée $\| \cdot \|$.

1. Un vecteur X est dit **gaussien** ou suit **une loi normale multivariée** si toute combinaison linéaire de ses composantes $\langle X, \lambda \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i$ (avec $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T \in \mathbb{R}^n$) est une variable aléatoire gaussienne.

3. L'espace de Lebesgue $\mathrm{L}^p(\Omega)$ des variables aléatoires réelles de moment d'ordre $p \geq 1$ fini pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$ est noté $\mathrm{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = \mathrm{L}^2(\Omega) := \{X; \int_\Omega \|X(\omega)\|^p \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) < \infty\}$

2. Un vecteur gaussien est charactérisé par $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)^T \in \mathbb{R}^n$ et la matrice $\Sigma \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symétrique et définie positive. On notera $X \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ et sa densité de probabilité $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est donnée par

$$p(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det \Sigma}} \exp\left(-\frac{\langle x-\mu, \Sigma^{-1}(x-\mu)\rangle}{2}\right), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Sa fonction caractéristique $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ est définie par

$$\varphi(t) = \mathbb{E}(\exp(i\langle t, X\rangle)) = \exp(i\langle t, \mu\rangle) \exp\left(-\frac{1}{2}\langle t, \Sigma t\rangle\right), \quad t \in \mathbb{R}^n,$$

avec $\mu \in \mathbb{R}^n$ et $\Sigma \in \mathbb{R}^{n\times n}$. On notera $X \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$. La matrice Σ est la **matrice de covariance** du vecteur gaussien t.q. $\Sigma = (\mathrm{cov}(X_i, X_j))_{1\le i,j\le n}$ et $\mu = \mathbb{E}(X) = (\mathbb{E}(X_1), \ldots, \mathbb{E}(X_n))^T$ est **l'espérance** de X. Si $\mathbb{E}(X) = 0$, le vecteur X est dit centré.

De façon générale un vecteur gaussien s'obtient par le biais d'une transformation affine d'une vecteur gaussien dont les composantes sont des variables aléatoires gaussiennes centrées réduites i.e. de loi $\mathcal{N}(0, I_n)$.

Proposition 1.2.5. *Soient $k, n \in \mathbb{N}^*$ et X un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}(0, I_k)$. Etant donnés $\mu \in \mathbb{R}^n$ et $L \in \mathbb{R}^{n\times k}$. Alors $\mu + LX \sim \mathcal{N}(\mu, LL^T)$.*

Démonstration. On calcule la fonction caractéristique de $Y = m + LX$. Pour tout $t \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\begin{aligned}
\varphi_Y(t) &= \mathbb{E}(\exp(i\langle t, Y\rangle)) = \mathbb{E}(\exp(i\langle t, m + LX\rangle)) = \exp(i\langle t, m\rangle)\mathbb{E}(\exp(i\langle t, LX\rangle)), \\
&= \exp(i\langle t, m\rangle) \underbrace{\mathbb{E}(\exp(i\langle L^T t, X\rangle))}_{\varphi_X(L^T t)} = \exp(i\langle t, m\rangle) \exp\left(-\frac{1}{2}\langle L^T t, L^T t\rangle\right), \\
&= \exp(i\langle t, m\rangle) \exp(-\frac{1}{2}\langle t, LL^T t\rangle).
\end{aligned}$$

donc $Y \sim \mathcal{N}(m, LL^T)$. ■

1.2.3 Processus gaussien

Définition 1.2.6. *(Processus gaussien) Un processus stochastique $X = \{X_t\}_{t\in I}$ à valeurs réelles de second ordre est appelé* **processus gaussien** *si $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ est gaussien, pour tout $(t_1, \ldots, t_n) \in I^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.*

La loi d'un processus gaussien $\{X_t\}_{t\in I}$ est complètement caractérisée par sa fonction moyenne $m : I \to \mathbb{R}$ et sa fonction covariance $C : I \times I \to \mathbb{R}$. En particulier, on a que la matrice de covariance vérifie $\Sigma = (C(t_i, t_j))_{1\le i,j\le n}$ et elle définie positive car c'est un processus du second ordre ![4]

Exemple 1.2.7. *Exemple de processus Gaussiens du second ordre centrés $m(t) = 0$.*

- *Processus d'Orstein-Uhlenbeck : $C(s,t) = \exp(-\frac{|t-s|}{2})$.*
- *Bruit blanc : $C(s,t) = \delta_s(t)$.*
- *Mouvement brownien ou processus de Wiener : $C(s,t) = \min(s,t)$.*

4. C'est une conséquence de l'égalité en loi.

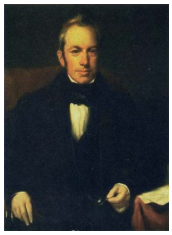
Chapitre 2

Mouvement brownien

2.1 Bref historique

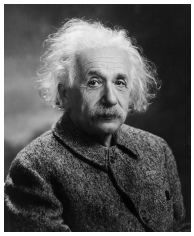
Dans ce paragraphe nous donnons un bref historique de l'apparition du **mouvement brownien** (aussi appelé **processus de Wiener**) et de la théorie du calcul stochastique qui en a découlé.

- **En 1827 :** le naturaliste botaniste écossais *Robert Brown* (voir figure 2.1.1) décrit le comportement erratique de particules en suspension dans un gaz ou un fluide par un **processus stochastique** appelé le **mouvement brownien**.
- **En 1901 :** le mathématicien français *Louis Bachelier* (voir figure 2.1.1) introduit dans sa thèse intitulée : « Théorie de la spéculation » le premier modèle mathématique du mouvement brownien appliqué à des modèles financiers.
- **En 1905 :** *Albert Einstein* (voir figure 2.1.1) utilise le mouvement brownien pour décrire le mouvement d'une particule physique. Il montre que la densité de probabilité de la particule d'être à une position donnée à un temps donné est une densité gaussienne (i.e. la densité du m.b.s. au temps t), solution fondamentale de l'équation de la chaleur.
- **En 1923 :** l'américain *Norbert Wiener* (voir figure 2.1.1) donne une première définition mathématique rigoureuse du mouvement brownien en construisant une mesure de probabilité sur l'espace des fonctions (continues) réelles. En d'autres termes, il définit le mouvement brownien comme un processus aléatoire (à trajectoires continues), c'est à dire une famille $\{W_t; t \in \mathbb{R}_+\}$ de variables aléatoires sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ (telle que l'application $t \mapsto W_t(\omega)$ est continue pour tout $\omega \in \Omega$). C'est pour cela qu'on appelle aussi le mouvement brownien : *processus de Wiener*. Wiener s'est aussi intéressé à la régularité des trajectoires $t \mapsto W_t$ de ce processus. Les trajectoires du Brownien sont continues mais non dérivables ! Wiener définit également l'intégrale par rapport au mouvement brownien qu'on appellera plus tard l'intégrale de Wiener. C'est le point de vue de Wiener que nous allons adopter dans la suite de ce cours.
- **Dans les années 50 :** les travaux du mathématicien japonais *Kiyoshi Itō* (voir figure 2.1.1) permettent d'étendre les outils du calcul différentiel au mouvement brownien, c'est l'apparition du calcul stochastique (intégrale d'Itō, formule d'Itō...). En parallèle le mathématicien français *Paul Lévy* (voir figure 2.1.1) met aussi en évidence de nombreuses propriétés sur la trajectoire du mouvement Brownien.

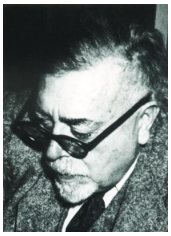


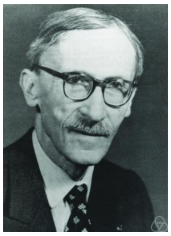
Robert Brown (1773 - 1858)

Louis Bachelier (1870 - 1946)



Albert Einstein (1879 - 1955)


Norbert Wiener (1879 - 1964)


Paul Lévy (1886 - 1971)

Kiyoshi Itō (1915 - 2008)

FIGURE 2.1.1 – Chercheurs ayant contribué à la construction du mouvement brownien. (*Photos from Wikimedia Commons, the free media repository.*)

2.1.1 Définitions

Dans cette partie on considère mouvement brownien en dimension 1 (i.e. $d = 1$).

Définition 2.1.1 (Mouvement brownien standard en dimension 1)**.** *Un* **mouvement brownien standard** *(m.b.s.) ou* **processus de Wiener** *est un processus stochastique, à temps continu et à trajectoires continues, noté W ou $\{W_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ à valeurs réelles TEL QUE*

1. $W_0 = 0$,
2. *tout accroissement* $W_t - W_s$, $0 \leq s < t$, *suit une loi gaussienne centrée de variance* $(t - s)$,
3. *pour tout* $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ *les accroissements* $\{W_{t_{i+1}} - W_{t_i}, 0 \leq i \leq n-1\}$ *sont indépendants.*

A l'instant t, W_t est une variable aléatoire gaussienne de moyenne $\mathbb{E}(W_t) = 0$ et de variance $\mathbb{E}(W_t^2) = t$ qui croit avec le temps. Ainsi on peut vérifier que W_t est une v.a. comprise dans l'intervalle $[-1.96\sqrt{t}, 1.96\sqrt{t}]$ avec une probabilité de 95% voir Figure 2.1.2. En effet comme $\frac{W_t}{\sqrt{t}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ alors $\mathbb{P}(|\frac{W_t}{\sqrt{t}}| \leq 1.96) = 0.95 \Leftrightarrow \mathbb{P}(-1.96\sqrt{t} \leq W_t \leq 1.96\sqrt{t}) = 0.95$.

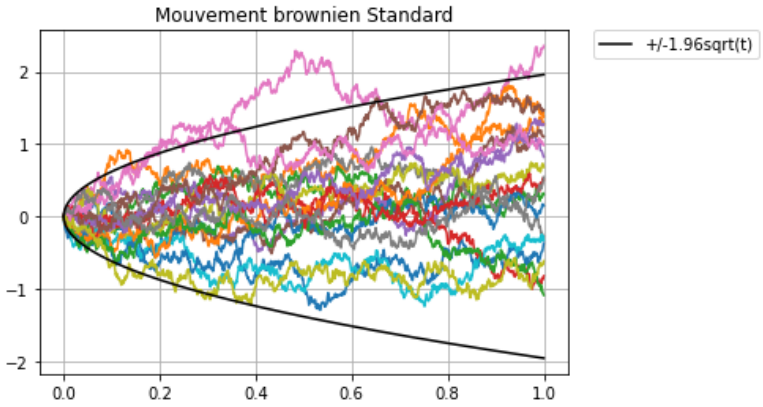


FIGURE 2.1.2 – Trajectoires du mouvement brownien.

REMARQUE.

1. Les trajectoires de W ne sont pas dérivables p.s. (voir TD).
2. Les trajectoires de W ne sont pas monotones p.s..

Théorème 2.1.2. *Le mouvement brownien existe.*

On peut considérer une preuve constructive de l'existence du mouvement brownien à la Wiener. Cette approche que l'on utilise aussi numériquement s'appuyant sur des séries de Fourier ou décomposition de Karhunen-Loève. Notons qu'il existe d'autres constructions : due à Kolmogorov, ou encore Donsker en interprétant le m.b.s. comme la limite d'une marche aléatoire (cf. TP).
On donne désormais une définition équivalente du m.b.s. .

Proposition 2.1.3 (Définition alternative du mouvement brownien)**.** *Un* **mouvement brownien standard** *(m.b.s.) ou* **processus de Wiener** *noté W est un processus gaussien centré d'espérance $m(t) = \mathbb{E}(W_t) = 0$ et de fonction de covariance $C(s,t) = \mathrm{cov}(W_t, W_s) = \min(s,t)$, $s,t \in \mathbb{R}_+$.*

Démonstration.

1. Comme $W_t \sim \mathcal{N}(0,t)$ alors $\mathbb{E}(W_t) = 0$ et $C(t,s) = \mathrm{cov}(W_t, W_s) = \mathbb{E}(W_t W_s)$ ainsi
   — si $t = s$, $C(t,t) = \mathbb{E}(W_t^2) = t = \min(s,t)$, en remarquant que $\mathbb{E}(W_t^2) = \mathbb{V}(W_t) + \mathbb{E}(W_t)^2 = t$
   — si $t \neq s$ avec $s < t$ on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(W_t W_s) &= \mathbb{E}((W_t - W_s)W_s + W_s^2) = \mathbb{E}((W_t - W_s)(W_s - W_0)) + s,\\ &= \underbrace{\mathbb{E}(W_t - W_s)\mathbb{E}(W_s - W_0)}_{=0} + s = s = \min(s,t).\end{aligned}$$

   car $W_t - W_s, W_s - W_0$ indépendants et centrés. On remarque d'ailleurs que par définition la fonction covariance est bien symétrique. On a un processus de second ordre.

2. Introduisons la séquence des accroissements $\{W_{t_i} - W_{t_{i-1}}, 1 \leq i \leq n\}$. On va montrer que $(W_{t_1}, \ldots, W_{t_n})^T$ est gaussien.
   Par définition du mouvement brownien on a $(W_{t_1} - W_{t_0}, \ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}})^T$ est un vecteur gaussien, dont les composantes sont indépendantes ainsi $W_{t_i} - W_{t_{i-1}} \sim \mathcal{N}(0, t_i - t_{i-1})$ et $(W_{t_1} - W_{t_0}, \ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}})^T \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$ avec $\Sigma = \mathrm{diag}(t_1 - t_0, \ldots, t_n - t_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
   Notons T la matrice de $\mathbb{R}^{n\times n}$ triangulaire définie par

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \ldots & & & \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   On a $(W_{t_1}, \ldots, W_{t_n})^T = T(W_{t_1} - W_{t_0}, \ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}})^T$.
   Ainsi par lemme du cours $(W_{t_1}, \ldots, W_{t_n})^T \sim \mathcal{N}(0, TDT^T)$. Ce qui prouve que W est gaussien et il est caractérisé par ses fonctions moyenne et covariance.

■

Nous énonçons désormais quelques propriétés des trajectoires du mouvement brownien.

Proposition 2.1.4. *Soit W un m.b.s., le processus X défini comme il suit est aussi un m.b.s. .*

i) (Symétrie) $X = -W$,

ii) (Propriété d'échelle) $X_t = \frac{1}{c} W_{c^2 t}$, pour $c \neq 0, t \geq 0$,

iii) (Retournement du temps) $X_t = W_T - W_{T-t}$ pour $t \in [0,T], T > 0$.

Démonstration.

Par construction, tous les processus considérés sont des processus gaussiens (on effectue uniquement des transformation du temps et des combinaisons linéaires).

Il reste donc à vérifier que leur fonction de covariance vérifie $C(s,t) = \min(s,t)$ pour tout $s,t \in I$.

i) On a directement $C(s,t) = Cov(X_t, X_s) = Cov(-W_t, -W_s) = \min(s,t)$.

ii) Comme $C(s,t) = \mathbb{E}(W_t^c W_s^c) = \frac{1}{c^2}\mathbb{E}(W_{c^2 t} W_{c^2 s}) = \frac{1}{c^2}\min(c^2 t, c^2 s) = \min(t,s)$.

iii) On a

$$C(s,t) = \mathbb{E}(X_t X_s) = \mathbb{E}\left((W_T - W_{T-t})(W_T - W_{T-s})\right) = \mathbb{E}(W_T^2) - \mathbb{E}(W_{T-t}W_T)$$

$$-\mathbb{E}(W_T W_{T-s}) + \mathbb{E}(W_{T-s}W_{T-t}) = T - (T-s) - (T-t) + \min(T-s, T-t) = t + s - \max(s,t) = \min(s,t),$$

en utilisant que $C(s,t) = cov(W_s, W_t) = \mathbb{E}(W_s W_t)$ (car W_s de moyenne nulle).

■

Le mouvement brownien possède d'autres propriétés : comme celle de Markov qui assure qu'il est aveugle de ce qui se passe avant t_0 (et est même indépendant) ou d'inversion en temps , mais surtout des propriétés de Martingale utiles pour la construction de l'intégrale stochastique (voir e.g. [1, 2]).

2.1.2 Variantes du mouvement brownien

Définition 2.1.5 (Mouvement brownien d-dimensionnel standard)**.** *Un mouvement brownien $d-$dimensionnel standard est un processus noté $\{\boldsymbol{W}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ en temps continu et à trajectoires continues t.q. $\boldsymbol{W}_t = ((W_1)_t, \dots, (W_d)_t)^T$ où les $\{(W_i)_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ sont des m.b.s. indépendants pour tout $1 \leq i \leq d$.*

Définition 2.1.6 (Mouvement brownien ayant une valeur initiale non nulle)**.** *Un mouvement brownien $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ issu de X_0 est un processus de la forme $X_t = X_0 + W_t$ avec X_0 indépendant de W_t.*

On peut aussi considérer $X_0 = x$ une C.I. déterministe.

Définition 2.1.7 (Mouvement brownien avec dérive ou arithmétique)**.** *Un mouvement brownien $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ issu de X_0, de dérive b et de coefficient de diffusion σ est un processus de la forme $X_t = X_0 + bt + \sigma W_t$ avec X_0 indépendant de W_t.*

Remarque. Dans la dernière définition, on appelle aussi $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ **mouvement brownien arithmétique**. C'est un processus à accroissements indépendant, stationnaires et gaussiens mais non centrées en effet $\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(X_0) + bt$.

2.2 Simulation du mouvement brownien

L'objectif de cette partie est de simuler une réalisation d'un mouvement brownien standard.

2.2.1 Discrétisation en temps

Considérons un m.b.s. $W = \{W_t\}_{t\geq 0}$, on veut simuler W sur l'intervalle de temps $I = [0, T]$. Pour cela, on se donne un maillage uniforme contenant $N + 1$ points $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_N$ où $t_i = i\Delta t$ et $\Delta t = \frac{T}{N}$. On simule une réalisation de W aux instants t_i de façon à obtenir le vecteur $W^N = (W_{t_1}, \dots, W_{t_N})^T$ (rappel $W_{t_0} = 0$). On verra comment calculer W^N par la suite par différentes stratégies.

Afin de construire une approximation "globale" $W^{\Delta t}$ de W pour tout $t \in [0, T]$ on peut par exemple construire un interpolant aux points $\{W_{t_1}, \dots, W_{t_N}\}$.

Approximation $\mathbb{P}_0$ par morceaux

Le processus approché $\{W_t^{\Delta t}\}_{t\in[0,T]}$ est **constant par morceaux** et défini par

$$W_s^{\Delta t} = W_{t_i}, \quad s \in [t_i, t_{i+1}), i \in \{0, \dots, N-1\},$$

de cette façon on a $W_{t_i}^{\Delta t} = W_{t_i}$ et $W^{\Delta t}$ est seulement **continu** à droite.

Approximation $\mathbb{P}_1$ par morceaux

Le processus approché $\{W_t^{\Delta t}\}_{t\in[0,T]}$ est **continu et affine par morceaux** et défini par

$$W_s^{\Delta t} = \frac{s - t_i}{\Delta t} W_{t_{i+1}} - \frac{s - t_{i+1}}{\Delta t} W_{t_i}, \quad s \in [t_i, t_{i+1}], i \in \{0, \dots, N-1\}.$$

On s'intéresse désormais aux calcul de la séquence W^N.

2.2.2 Méthode de Cholesky

Cette méthode permet de simuler les trajectoires de tout processus gaussien centré et en particulier le m.b.s.. Avant de rentrer dans les détails, rappelons le résultat sur la décomposition de Cholesky d'une matrice symétrique définie positive (voir [4, p.80-81]).

Théorème 2.2.1 (Décomposition de Cholesky)**.** *Soit A une matrice réelle de taille $n \times n$, symétrique et définie positive. Alors il existe une unique matrice triangulaire inférieure L de taille $n \times n$ dont les coefficients diagonaux sont tous positifs telle que $A = LL^T$*

On procède de la façon suivante.

1. Pour simuler un processus gaussien centré noté X aux instants $t_1, \dots, t_N$ on introduit sa matrice de covariance $\Sigma \in \mathbb{R}^{N \times N}$ définie par $\Sigma_{ij} = cov(X_{t_i}, X_{t_j}), 1 \leq i, j \leq N$ (définie positive) de coefficients donnés par

$$\Sigma_{ij} = \text{cov}(W_{t_i}, W_{t_j}) = \min(t_i, t_j) = \frac{T}{N} \min(i, j), 1 \leq i, j \leq N.$$

2. Puis on calcule L la matrice de factorisation de Cholesky donnée par $\Sigma = LL^T$.

3. Etant donnée un vecteur gaussien centré réduit Z de taille n t.q. $Z \sim \mathcal{N}(0, Id)$ alors LZ a la même loi que $(X_{t_1}, \dots, X_{t_N}) \sim \mathcal{N}(0, LL^T)$ par la Proposition 1.2.5. Une trajectoire du brownien obtenue par ce biais est tracée sur la Figure 2.2.1.

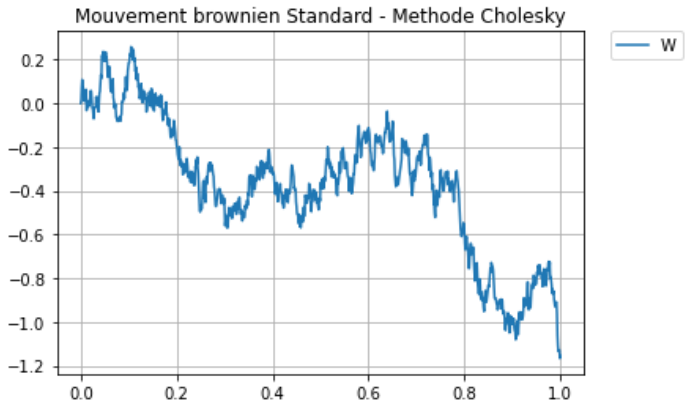


FIGURE 2.2.1 – Méthode de Cholesky : trajectoire du mouvement brownien sur $[0, 1]$ pour $N = 1000$.

2.2.3 Procédure progressive

L'idée est de calculer itérativement la séquence W^N à l'aide de v.a. gaussiennes centrées réduites indépendantes.

1. Générer une séquence $(\xi_1, \dots, \xi_N)$ de n v.a. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

2. En posant $W_{t_0} = W_0 = 0$ calculer pour $i = 1, \dots, N$

$$W_{t_i} = W_{t_{i-1}} + \sqrt{\Delta t}\xi_i,$$

car $W_{t_i} - W_{t_{i-1}} \sim \mathcal{N}(0, \Delta t)$.Une trajectoire du brownien obtenue par ce biais est tracée sur la Figure 2.2.2.

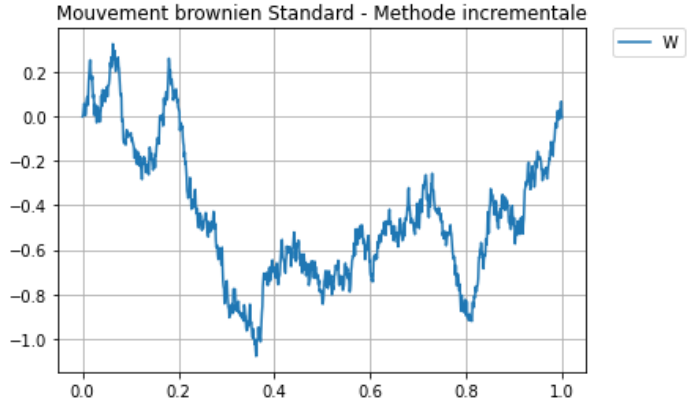


FIGURE 2.2.2 – Méthode progressive : trajectoire du mouvement brownien sur $[0,1]$ obtenu pour $N = 1000$.

2.2.4 Décomposition de Karhunen-Loève

Une autre méthode consiste à construire générer les W_{t_n} à partir de la décomposition de Karhunen-Loève (2.2.1) du m.b.s.

$$W_t = \sum_{m=0}^{\infty} \xi_m \phi_m(t), \quad t \in [0,T] \tag{2.2.1}$$

avec $\phi_m(t) = \dfrac{2\sqrt{2T}}{(2m+1)\pi} \sin\left(\dfrac{2m+1}{2T}\pi t\right)$ des fonctions orthogonales pour le produit scalaire L^2 sur $[0,T]$. Pour cela, on évalue aux noeuds du maillage temporel $\{t_1, \ldots, t_n\}$, le processus tronqué W_t^K de W_t aux K premiers termes de la série donné par

$$W_t^K = \sum_{m=0}^{K} \xi_m \phi_m(t), \quad t \in [0,T].$$

Une trajectoire du brownien obtenue par ce biais est tracée sur la Figure 2.2.2.

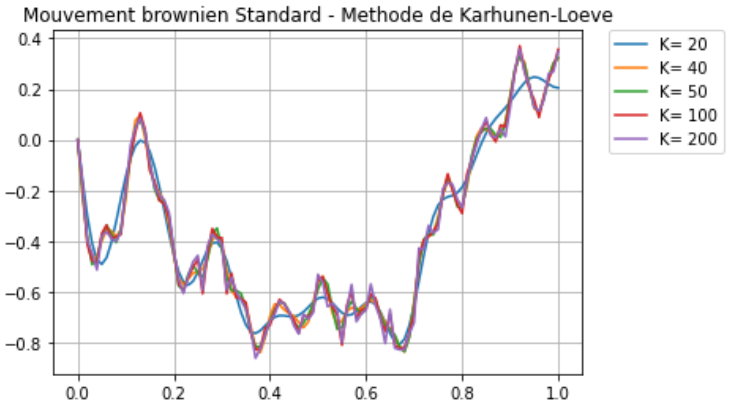


FIGURE 2.2.3 – Méthode de KL : trajectoire du mouvement brownien sur $[0,1]$ pour $N = 100$ et $K \in \{20, 40, 50, 100, 200\}$.

♠ On donne pour terminer un résultat sur l'erreur de troncature commise lorsqu'on approche W_t par W_t^K (développement de KL tronqué à $K+1$ termes) qui nous dit que **l'erreur quadratique** se comporte en $O(K^{-1/2})$.

Proposition 2.2.2. *Pour $K \in \mathbb{N}$ et $t \in I = [0,T]$ l'erreur quadratique est donnée par*

$$\mathbb{V}(W_t) - \mathbb{V}(W_t^K) \leq \frac{2T}{\pi^2 K}$$

de même l'erreur en moment d'ordre 2 i.e. pour la norme de $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathrm{L}^2(0,T))$ *est donnée par*

$$\mathbb{E}\left(||W - W^K||^2_{\mathrm{L}^2([0,T])}\right) \leq \frac{T}{\pi^2 K}.$$

RÉSULTATS UTILES. Soit $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires convergeant vers une v.a. X.

i) (Théorème de Kolmogorov) Soit $\{X_n\}_{n\geq 1}$ une suite de v.a. de $L^2(\Omega)$, indépendantes et centrées. Si

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{E}(X_n^2) < \infty \Rightarrow \sum_{n\geq 1} X_n \text{ converge p.s..}$$

ii) Supposons que $X_n \sim \mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2)$ converge en loi et (m_n, σ_n^2) converge. Alors la loi limite de X_n est une loi normale de paramètres $(\lim_n m_n, \lim_n \sigma_n^2)$.

Démonstration.

1. **On montre que W_t^n converge presque sûrement quand $n \to \infty$. On notera W_t sa limite.** Soit $t \in [0,T]$ fixé, posons $X_m(t) = \xi_m \phi_m(t)$. On a $\mathbb{E}(X_m(t)) = \mathbb{E}(\xi_m)\phi_m(t) = 0$ et $\{X_m(t)\}_{m\geq 0}$ sont indépendantes par indépendance des $\{\xi_m\}_{m\geq 0}$. Par ailleurs

$$\sum_{m\geq 0} \mathbb{E}(X_m(t)^2) = \sum_{m\geq 0} \phi_m(t)^2 \mathbb{E}(\xi^2) = \sum_{m\geq 0} \phi_m(t)^2 = t \leq T < \infty.$$

   Par le théorème de Kolmogorov, $W_t^n = \sum_{m=0}^n X_m(t)$ converge p.s..

2. **On vérifie que $\{W_t\}_{t\in[0,T]}$ est un processus Gaussien de fonction moyenne nulle $m(t) = 0$ et de fonction de covariance $C(s,t) = \min(s,t)$, $s,t \in [0,T]$.** Par définition, W_t^n est une gaussienne centrée comme combinaison linéaire de gaussiennes indépendantes $\{\xi_m\}_{m\geq 0}$. De plus,
   (a) $\mathbb{E}(W_t^n) \to 0$ et $\mathbb{V}(W_t^n) = \sum_{m=0}^n \phi_m(t)^2 \to \sum_{m=0}^\infty \phi_m(t)^2 = t$ quand $n \to \infty$.
   (b) Comme W_t^n converge p.s. donc en loi, alors sa limite $W_t \sim \mathcal{N}(0,t)$ par le résultat *ii)* du complément.

   Plus généralement on va montrer que $\{W_t\}_{t\in[0,T]}$ est un processus gaussien de fonctions moyenne et covariance qui vont bien.
   — Pour tout $0 \leq t_1 < \cdots < t_k \leq T$, $(W_{t_1}^n, \ldots, W_{t_k}^n)^T$ est gaussien, car toute combinaison linéaire $X^n = \sum_{i=1}^k \lambda_i W_{t_i}^n, \lambda_i \in \mathbb{R}$, de v.a. gaussiennes $\{\xi_m)\}_{m\geq 0}$ indépendantes, est gaussienne.
   — Par ailleurs, comme les $W_{t_i}^n$ convergent p.s. vers W_{t_i} alors X^n converge p.s. donc en loi vers $X = \sum_{i=1}^k \lambda_i W_{t_i}$ qui est gaussienne par *ii)* (avec la moyenne $\mathbb{E}(X) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X^n) = 0$ et la variance $\mathbb{E}(X^2) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{V}(X^n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}((X^n)^2) = \sum_i \lambda_i^2 t_i^2 + \sum_{i\neq j} \lambda_i \lambda_j \min(t_i, t_j)$). Autrement dit $(W_{t_1}, \ldots, W_{t_k})^T$ est gaussien.
   On en conclut que $\{W_t\}_{t\in[0,T]}$ est un processus gaussien.

   Enfin on a déjà vu $m(t) = \mathbb{E}(W_t) = 0$. Par ailleurs $C(s,t) = \mathbb{E}(W_t W_s)$ est donné par la limite de

$$\mathbb{E}(W_t^n W_s^n) = \mathbb{E}((\sum_{m=0}^n \xi_m \phi_m(t))(\sum_{m=0}^n \xi_m \phi_m(s))) = \sum_{m=0}^n \phi_m(t)\phi_m(s)\mathbb{E}(\xi_m^2) = \sum_{m=0}^n \phi_m(t)\phi_m(s) \to \min(s,t).$$

   On retrouve bien les propriétés du mouvement brownien.

   ☞ *Ce passage à la limite licite, on peut vérifier que* $\mathbb{E}(|W_t^n W_s^n - W_t W_s|) \to 0$ *donc* $\mathbb{E}(W_t W_s) \to C(s,t)$ *quand* $n \to \infty$. *En effet par C.S., on a*

$$\mathbb{E}(|W_t^n W_s^n - W_t W_s|) \leq \mathbb{E}(|W_t^n||W_s^n - W_s|) + \mathbb{E}(|W_s||W_t^n - W_t|)$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(|W_t^n W_s^n - W_t W_s|) \leq \underbrace{\mathbb{E}(|W_t^n|^2)}_{\to t}\mathbb{E}(|W_s^n - W_s|^2) + \underbrace{\mathbb{E}(|W_s|^2)}_{=s}\mathbb{E}(|W_t^n - W_t|^2).$$

Par ailleurs

$$\mathbb{E}(|W_s^n - W_s|^2) = \mathbb{E}(|W_s^n|^2) - 2\mathbb{E}\left(\sum_{m=0}^{n} \xi_m\phi_m(s)\sum_{m\geq 0}\xi_m\phi_m(s)\right) + \mathbb{E}(|W_s|^2) = \mathbb{E}(|W_s^n|^2) - 2\mathbb{E}(|W_s^n|^2) + \mathbb{E}(|W_s|^2)$$

$$\to s - 2s + s = 0.$$

En effet, les ξ_m sont i.i.d et centrées, alors $\mathbb{E}\left(\sum_{m=0}^{n}\xi_m\phi_m(s)\sum_{m\geq 0}\xi_m\phi_m(s)\right) = \mathbb{E}\left(|\sum_{m=0}^{n}\xi_m\phi_m(s)|^2\right)) = \mathbb{E}(|W_s^n|^2)$. *Donc* $\mathbb{E}(|W_t^nW_s^n - W_tW_s|) \to 0$, *quand* $n \to \infty$.

3. **Montrons les estimations d'erreur pour les séries tronquées.** Soit $t \in [0,T]$. Comme $\mathbb{V}(W_t) = \sum_{m=0}^{\infty}\phi_m(t)^2$ et $\mathbb{V}(W_t^n) = \sum_{m=0}^{n}\phi_m(t)^2$.

$$\mathbb{V}(W_t) - \mathbb{V}(W_t^n) = \sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{8T}{(2m+1)^2\pi^2}\sin^2\left(\frac{2m+1}{2T}\pi t\right) \leq \frac{2T}{\pi^2 n}$$

car $\sin^2\left(\frac{2m+1}{2T}\pi t\right) \leq 1$ et $\sum_{m=n+1}^{\infty}(2m+1)^{-2} \leq \int_n^{\infty}(2y)^{-2}\mathrm{d}y = \frac{1}{4n}$. Comme $\mathbb{E}(\xi_m^2) = 1$, on a donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(||W - W^n||^2_{\mathrm{L}^2([0,T])}\right) &= \mathbb{E}\left(\left\|\sum_{m=n+1}^{\infty}\xi_m\phi_m\right\|^2_{\mathrm{L}^2([0,T])}\right) \underbrace{=}_{\text{dev. du pdt. scal. + orth.}} \mathbb{E}\left(\sum_{m=n+1}^{\infty}\xi_m^2\|\phi_m\|^2_{\mathrm{L}^2([0,T])}\right), \\ &= \sum_{m=n+1}^{\infty}\|\phi_m\|^2_{\mathrm{L}^2([0,T])} = \sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{4T^2}{(2m+1)^2\pi^2} \leq \frac{T^2}{\pi^2 n}\end{aligned}$$

car $\|\phi_m\|^2_{\mathrm{L}^2([0,T])} = \int_0^T\left(\frac{2\sqrt{2T}}{(2m+1)\pi}\sin\left(\frac{2m+1}{2T}\pi t\right)\right)^2 dt = \frac{4T^2}{(2m+1)^2\pi^2}$.

■

Chapitre 3

Eléments du calcul stochastique

Considérons $g : [0,T] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et $h : [0,T] \to \mathbb{R}$ intégrable.

Motivation ① On peut écrire l'intégrale (au sens de Riemann)

$$\int_0^T h(t)\mathrm{d}g(t) := \int_0^T h(t)g'(t)\mathrm{d}t := \lim_{n\to\infty} \int_0^T h_n(t)g'(t)dt,$$

où $h_n(t) := \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i \mathbf{1}_{[t_i,t_{i+1})(t)}$ est une fonction définie par morceaux t.q. $\int_0^T |h_n(t) - h(t)|dt \to 0$ quand $n \to \infty$. Par analogie on aimerait définir de même la notion d'intégrale pour

$$\int_0^T H_t(\omega)\mathrm{d}W_t(\omega)$$

où W est un m.b.s. (de trajectoire non $\mathscr{C}^1$, c.f. TD) et où H dénote un processus stochastique. Dans ce cas quelle notion de mesurabilité doit on donner à H et comment définir l'intégrale ?

Motivation ② Désormais, considérons

$$\int_0^T g(t)dg(t) := \int_0^T g(t)g'(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^T G'(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(g^2(T) - g^2(0)).$$

où l'avant dernière égalité est obtenue en posant $G(t) = g^2(t)$. De la même façon que précédente, on souhaiterait pouvoir calculer

$$\int_0^T W_t\mathrm{d}W_t$$

en posant $G_t = W_t^2$.

3.1 Filtration et mesurablité

On considère par la suite $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités. On appelle **sous-tribu** $\mathcal{F}$ de $\mathcal{A}$, une tribu sur Ω incluse dans $\mathcal{A}$.

Définition 3.1.1 (Variables aléatoires et sous-tribus)**.** *Soit X une v.a. définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$ à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$.*

- *La variable aléatoire est mesurable par rapport à $\mathcal{F}$ sous-tribu de $\mathcal{A}$ si $\{X \in B\} \in \mathcal{F}$ pour tout $B \in \mathcal{E}$. On dit que X est $\mathcal{F}$-**mesurable**.*
- *La sous-tribu engendrée par X est notée $\sigma(X) := \{\{X \in B\}, B \in \mathcal{E}\}$. C'est une sous-tribu de $\mathcal{A}$.*

Définition 3.1.2 (Filtration)**.** *Soit I un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Une* **filtration** *est une famille de sous-tribus, notée $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in I}$ de $\mathcal{A}$ t.q. pour tout $s, t \in I$ avec $s \leq t$ on a $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$.*

Une filtration est donc une suite croissante de sous-tribus $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}$ de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{F}_t$ représente l'information disponible à l'instant t. La filtration va nous permettre de définir une notion de mesurabilité pour un processus X.

Définition 3.1.3 (Processus adapté)**.** *Soit $X = \{X_t\}_{t\in I}$ un processus stochastique. Ce processus est dit* **adapté** *à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in I}$, si pour tout $t \in I$ alors X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.*

On peut donc désormais définir une notion de mesurabilité de $X : (t, \omega) \to \mathbb{R}$ sur $[0,T] \times \Omega$ uniquement vis à vis de cette information disponible à chaque instant t, et non plus de la "grosse" tribu produit $\mathcal{B}([0,T]) \times \mathcal{A}$.
⚠ Attention, ne pas confondre avec cette nouvelle notion de mesurabilité avec celle que nous avons introduite dans le Chapitre 1 pour les processus stochastiques. En effet, cette dernière donne une notion de mesurabilité pour la famille de v.a. indexée par t i.e. $\{X_t\}_{t\in I}$ à valeurs dans E !

Définition 3.1.4. *Un processus stochastique $X = \{X_t\}_{t\in I}$ est dit* **progressivement mesurable** *si pour tout $t \in I$, l'application de $[0,t] \times \Omega$ dans $\mathbb{R}$ définie par $(s,\omega) \to X_s(\omega)$ est mesurable pour la tribu produit $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$.*

Un processus stochastique progressivement mesurable est adapté, le contraire n'est pas vrai en général.

Exemple 3.1.5 (Filtration engendrée par un processus stochastique)**.** *Soit $X = \{X_t\}_{t\in I}$ un processus stochastique. La filtration engendrée par X est définie par*

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(\{X_s\}_{s\in I, s\leq t}),$$

pour tout $t \in I$. La filtration propre d'un processus stochastique X représente l'information contenue dans l'observation de X entre les instants 0 et t. On remarquera que si $\mathcal{F}_t^X \subset \mathcal{F}_t$ alors X est $\mathcal{F}$-adapté.

Nous terminons par énoncer la définition d'un m.b.s. adapté à une filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$.

Définition 3.1.6. *On appelera un $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$-mouvement brownien, un m.b.s. W t.q.*

- *W est adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$,*
- *pour tout $0 \leq s \leq t$ on a, $W_t - W_s$ indépendant de $\mathcal{F}_s$.*

☞Cela permettra par la suite d'assurer que W_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable. Une conséquence est que par indépendance dans l'espérance conditionnelle (voir rappels dans la section 5.3) $\mathbb{E}(W_t - W_s) = \mathbb{E}(W_t - W_s|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(W_t|\mathcal{F}_s) - W_s = 0 \Leftrightarrow \mathbb{E}(W_t|\mathcal{F}_s) = W_s$. C'est ce qu'on appelle une propriété de **martingale**.

On retiendra les propriétés pratiques suivantes (cf. détails Section 5.3).

1. Soit X un processus stochastique. Si X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable : $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_t) = X_t$.
2. Soit X un processus stochastique. Si X_t est indépendant de $\mathcal{F}_t$: $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(X_t)$.
3. Soit X un processus stochastique et ξ une v.a. $\mathcal{F}_t$-mesurable : $\mathbb{E}(\xi X_t|\mathcal{F}_t) = \xi\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_t)$.

3.2 Quelques éléments pour comprendre l'intégrale stochastique de Itō

Ici nous donnons une très brève introduction à l'intégrale stochastique au sens de de Itō, pour plus de détails voir [1, 5] par exemple.

On considère par la suite $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités. On travaille avec la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ et on note W un m.b.s. adapté à cette filtration. On supposera que $\mathcal{F}_0$ contient tous les évènements négligeables (i.e. tous les $A \in \mathcal{A}$ t.q. $\mathbb{P}(A) = 0$). Enfin, on notera $I = [0,T] \subset \mathbb{R}_+$.

L'objectif de ce paragraphe est de construire l'intégrale suivante

$$\int_0^T H_t \mathrm{d}W_t,$$

pour des processus stochastiques H (dont les propriétés sont à définir pour que l'intégrale ait du sens, et soit bien définie).

Processus progressivement mesurables.

Soit $t = 0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ avec $t_i = iT/n$. Par analogie avec la définition de l'intégrale (au sens de Riemann) pour les fonctions régulières, une idée serait de construire le processus stochastique défini par morceaux H^n par

$$H_t^n = \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i \mathbf{1}_{[t_i, t_{i+1})}(t)$$

et de définir

$$\int_0^T H_t \mathrm{d}W_t = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}).$$

Dans la suite nous noterons
- $\Lambda^2(I)$ l'ensemble des processus progressivement mesurables t.q. $\int_0^T \mathbb{E}(H_t^2)dt < \infty$.
- $\Lambda_0^2(I) \subset \Lambda^2(I)$ contenant tous les processus stochastiques par morceaux $H^n = \{H_t^n\}_{t\in I}$ t.q. $t = 0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ et des v.a. $\xi_0, \ldots, \xi_{n-1}$ t.q. $H_t = \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i \mathbf{1}_{[t_i,t_{i+1})}(t)$. [a]

a. Cette convention est importante et correspond à l'intégrale de Itō. En effet il est possible de définir des processus stochastiques par morceaux différemment, ce qui amène à une autre définition de l'intégrale.

Lemme 3.2.1. *Un processus stochastique H^n appartient à $\Lambda_0^2(I)$ `si et seulement si` les v.a. $\xi_i, i = 0, \ldots, n-1$ sont dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$ et $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurables.*

Démonstration. On peut se convaincre assez facilement que $\int_0^T \mathbb{E}(H_t^2) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}(\xi_i^2)(t_{i+1} - t_i) < \infty$ si et seulement si $\mathbb{E}(\xi_i^2) < \infty$. Par ailleurs, si et seulement si les ξ_i sont $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurables, cela assure que H est progressivement mesurable (voir détails [5, Lemma 10.1.3, Chapitre 10.1]). ■

Ce lemme indique que les v.a. ξ_i qui définissent les processus H^n de $\Lambda_0^2(I)$ ne dépendent que de l'information disponible à l'instant t_i !

Définition 3.2.2 (Intégrale stochastique pour les processus de $\Lambda_0^2(I)$)**.** *Pour tout $H^n \in \Lambda_0^2(I)$, on définit l'intégrale stochastique comme*

$$\int_0^T H_t^n \mathrm{d}W_t = \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}). \tag{3.2.1}$$

Proposition 3.2.3. *L'intégrale stochastique définie par (3.2.1) est un processus progressivement mesurable qui satisfait les propriétés suivantes.*

— *(Linéarité) Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $H^n, G^n \in \Lambda_0^2(I)$ on a*

$$\int_0^T (\lambda H_t^n + \mu G_t^n)\mathrm{d}W_t = \lambda \int_0^T H_t^n \mathrm{d}W_t + \mu \int_0^T G_t^n \mathrm{d}W_t.$$

— *(Isométrie) On a*

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T H_t^n \mathrm{d}W_t\right) = 0 \qquad \mathbb{E}\left(\left(\int_0^T H_t^n \mathrm{d}W_t\right)^2\right) = \int_0^T \mathbb{E}((H_t^n)^2)\mathrm{d}t.$$

La dernière égalité est appelée **isométrie de Itō.**

Démonstration. La linéarité est directe. Pour la propriété d'espérance nulle, on écrit

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t H_s^n \mathrm{d}W_s\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^t H_s^n \mathrm{d}W_s\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{n-1} \xi_i (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\xi_i (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})|\mathcal{F}_{t_i}\right)\right)$$

Or ξ_i est $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurable, par propriété de l'espérance conditionnelle, il vient

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t H_s^n \mathrm{d}W_s\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}\left(\xi_i \mathbb{E}\left((W_{t_{i+1}} - W_{t_i})|\mathcal{F}_{t_i}\right)\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}\left(\xi_i \mathbb{E}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})\right) = 0.$$

Les accroissements brownien étant indépendant de $\mathcal{F}_{t_i}$ et centrés, on en déduit la dernière égalité.
☞En fait on pourrait même dire directement $\mathbb{E}\left((W_{t_{i+1}} - W_{t_i})|\mathcal{F}_{t_i}\right) = 0$. C'est la propriété de martingale.
Pour l'isométrie, on écrit

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t (H_s^n)^2 \mathrm{d}W_s\right) = \underbrace{\mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{n-1} \xi_i^2 (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2\right)}_{=A} + \underbrace{\mathbb{E}\left(\sum_{j\neq i} \xi_i \xi_j (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})\right)}_{=B}$$

En procédant de même que précédemment pour le premier terme on a

$$A = \left(\sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(\xi_i^2 (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 | \mathcal{F}_{t_i}\right)\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}\left(\xi_i^2 \underbrace{\mathbb{E}((W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2)}_{=h}\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}(\xi_i^2) h = \int_0^T \mathbb{E}((H_s^n)^2) \mathrm{d}s.$$

Pour le second terme on utilise encore l'indépendance des accroissements par rapport à la filtration

$$B = 2\sum_{j<i} \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(\xi_i \xi_j (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}))\right) = 2\sum_{j<i} \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(\xi_i \xi_j (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) | \mathcal{F}_{t_i})\right)$$

Or par définition de la filtration, on a $\mathcal{F}_{t_j} \subset \mathcal{F}_{t_i}$ ainsi les ξ_i, ξ_j et $W_{t_{j+1}} - W_{t_j}$ sont $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurables ainsi

$$B = 2\mathbb{E}\left(\sum_{j<i} \xi_i \xi_j (W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) \mathbb{E}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i} | \mathcal{F}_{t_i})\right) = 0,$$

et par indépendance des accroissement par rapport à $\mathcal{F}_{t_i}$ alors $\mathbb{E}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i} | \mathcal{F}_{t_i}) = \mathbb{E}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) = 0$. ■

Nous admettrons les résultats qui suivent sans les démontrer (pour plus de détails voir e.g. [1, 5]).

Cas des processus $\Lambda^2(I)$ (voir [1]).

Désormais, on souhaite étendre cette définition aux processus plus généraux, i.e. dans $\Lambda^2(I)$. Par la suite on équipe $\Lambda^2(I)$ de la norme $\|\cdot\|_{\Lambda^2(I)}$ définie par

$$\|H\|^2_{\Lambda^2(I)} = \int_0^T \mathbb{E}(H_t^2) \mathrm{d}t.$$

On retiendra que : pour $H \in \Lambda^2(I)$ et pour peut qu'il existe $H^n \in \Lambda_0^2(I)$ t.q. $\|H - H^n\|^2_{\Lambda^2(I)} \to 0$. On définit l'intégrale stochastique de H comme

$$\int_0^T H_t \mathrm{d}W_t = \lim_{n\to\infty} \int_0^T H_t^n \mathrm{d}W_t, \text{ dans } \mathrm{L}^2(\Omega).$$

Elle possède les mêmes propriétés de linéarité et d'isométrie que pour les processus de $\Lambda_0^2(I)$.

Cas des processus $\Lambda_{loc}(I)$.

Il est possible de relaxer l'hypothèse $H \in \Lambda^2(I)$ en considérant uniquement des processus stochastiques dans $\Lambda_{loc}(I)$ et t.q.

$$\forall T > 0 \quad \int_0^T H_t^2 \mathrm{d}t < \infty, \quad \text{presque surement.}$$

Bien sur si $H \in \Lambda^2(I)$ alors $H \in \Lambda_{loc}(I)$. L'idée est ensuite de construire l'intégrale stochastique pour tout $H \in \Lambda_{loc}(I)$ un processus (localisé) $H^M \in \Lambda^2(I)$ t.q.

$$\int_0^T H_t \mathrm{d}W_t = \lim_{M\to\infty} \mathcal{I}(H^M) \text{ presque sûrement.}$$

Les résultats de la Proposition 3.2.3 restent vrais pour $\Lambda_{loc}(I)$. Attention toutefois au point 3, qui est satisfait si de plus $\mathbb{E}(\int_0^T H_t^2 \mathrm{d}t) < \infty$.). Les preuves nécessitent la définition de temps d'arrêt que nous n'avons pas introduit dans ce cours.

3.3 Formule de Itō

Théorème 3.3.1 (Formule de Itō pour le mouvement brownien $\phi(W_t)$)**.** *Soit $\phi \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$ alors pour tout $t > 0$ on a*

$$\phi(W_t) = \phi(0) + \int_0^t \phi'(W_s) \mathrm{d}W_s + \frac{1}{2}\int_0^t \phi''(W_s) \mathrm{d}s, p.s., \tag{3.3.1}$$

ou de façon équivalente

$$\mathrm{d}\phi(W_t) = \phi'(W_t) \mathrm{d}W_t + \frac{1}{2}\phi''(W_t) \mathrm{d}t. \tag{3.3.2}$$

REMARQUES. En fait, comme $\phi \in \mathscr{C}^2$ alors on a $t \mapsto \phi'(W_t)$ et $t \mapsto \phi''(W_t)$ continues p.s. donc bornées p.s. sur $[0,T]$, en particulier cela assure qu'on a bien un processus $\{\phi'(W_t)\}_{t\geq 0}$ dans $\Lambda_{loc}([0,T])$. Les intégrales dans le membre de droite de l'équation sont bien définies.

Exemple 3.3.2. *Soit W un m.b.s. adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$. Montrer que pour tout $t \geq 0$*

$$\int_0^t W_s \mathrm{d}W_s = \frac{1}{2}(W_t^2 - t), p.s..$$

Considérons, $\phi(x) = x^2$ on a $\phi \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$ avec $\phi'(x) = x, \phi''(x) = 1$. La formule de Itō donne

$$\frac{1}{2}W_t^2 = \frac{1}{2}W_0^2 + \int_0^t W_s \mathrm{d}W_s + \frac{1}{2}\int_0^t \mathrm{d}s \Rightarrow \int_0^t W_s \mathrm{d}W_s = \frac{1}{2}(W_t^2 - t).$$

Théorème 3.3.3 (Formule de Itō pour le mouvement brownien $\phi(t, W_t)$)**.** *Soit $\phi \in \mathscr{C}^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ alors pour tout $t \geq 0$ on a*

$$\phi(t, W_t) = \phi(0,0) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\phi(s, W_s)\mathrm{d}s + \int_0^t \frac{\partial}{\partial x}\phi(s, W_s)\mathrm{d}W_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi(s, W_s)\mathrm{d}s, \ p.s., \tag{3.3.3}$$

ou de façon équivalente

$$\mathrm{d}\phi(t, W_t) = \frac{\partial}{\partial t}\phi(t, W_t)\mathrm{d}t + \frac{\partial}{\partial x}\phi(t, W_t)\mathrm{d}W_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi(t, W_t)\mathrm{d}t. \tag{3.3.4}$$

Exemple 3.3.4. *Soit S le processus défini par $S_t = S_0 \exp((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t)$, montrer que pour tout $t \geq 0$*

$$\mathrm{d}S_t = \mu S_t \mathrm{d}t + \ \sigma S_t \mathrm{d}W_t.$$

Considérons, $\phi(t,x) = S_0 \exp((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma x)$ on a $\phi \in \mathscr{C}^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ avec $\partial_t\phi(t,x) = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\phi(t,x)$, $\partial_x\phi(t,x) = \sigma\phi(t,x)$, $\partial^2_{xx}\phi(t,x) = \sigma^2\phi(t,x)$. La formule de Itō donne ainsi pour $S_t = \phi(t, W_t)$:

$$\mathrm{d}S_t = \mathrm{d}\phi(t, W_t) = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\phi(t, W_t)\mathrm{d}t + \sigma\phi(t, W_t)\mathrm{d}W_t + \frac{1}{2}\sigma^2\phi(t, W_t) = \mu S_t \mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}W_t, \ p.s..$$

Chapitre 4

Représentation probabiliste des EDP : exemple de l'équation de la chaleur

4.1 Un résultat formel

Dans le paragraphe qui suit, nous allons faire le lien (de façon assez formelle) entre l'équation de la chaleur 1D (en domaine non borné) et un mouvement brownien. Nous considérons dans le cas mono-dimensionnel. Soit W un m.b.s. et $x \in \mathbb{R}$ donné. A l'instant $t > 0$, la variable aléatoire $x + W_t$ est de loi gaussienne de moyenne x et de variance t. Ainsi sa densité de probabilité est donnée par

$$g(y;t,x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2t}\right), \quad y \in \mathbb{R}.$$

Par ailleurs un calcul direct donne

$$\begin{aligned} \partial_t g(y;t,x) &= -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2t}\right) + \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\frac{(y-x)^2}{2} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2t^2}\right), \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{2\pi t^3}}\left(1 - \frac{(y-x)^2}{t}\right) \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2t}\right). \end{aligned}$$

et

$$\partial_x g(y;t,x) = \frac{(y-x)}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2t}\right),$$

ainsi

$$\partial^2_{xx} g(y;t,x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2t}\right) + \frac{(y-x)^2}{\sqrt{2\pi t^5}} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2t}\right) = 2\partial_t g(y;t,x).$$

Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable et bornée il vient

$$\int_{\mathbb{R}} \partial_t g(y;t,x) f(y) \mathrm{d}y = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \partial^2_{xx} g(y;t,x) f(y) \mathrm{d}y,$$

en notant $u(t,x) = \mathbb{E}(f(x+W_t)) = \int_{\mathbb{R}} g(y;t,x) f(y) dy$, on obtient en appliquant le théorème de dérivation des intégrales à paramètres de Lebesgue la relation

$$\partial_t u(t,x) = \frac{1}{2}\partial^2_{xx} u(t,x), \quad u^0(x) = f(x). \tag{4.1.1}$$

Notons que pour $t \to 0^+$, on a la loi normale impropre où la densité de probabilité coïncide avec la mesure de Dirac au point x i.e.

$$\lim_{t \to 0^+} g(\cdot;t,x) = \delta_x.$$

4.2 Une première formule de Feynman-Kac

Etant donnée $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, considérons le problème de Cauchy suivant, associé à l'équation de la chaleur :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t u(t,x) &=& \frac{1}{2}\partial^2_{xx} u(t,x), t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) &=& f(x). \end{array} \right. \tag{4.2.1}$$

Proposition 4.2.1 (Feynman-Kac pour la chaleur)**.** *Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$. Supposons qu'il existe une solution $u \in \mathscr{C}^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R},\mathbb{R})$ du problème de Cauchy défini par (4.2.1) telle que, pour tout $t\in[0,T]$ et $x\in\mathbb{R}$ on ait*

$$(\partial_x u(x, W_s^x))_{s\in[0,T]} \in \Lambda^2([0,t]),$$

alors pour tout $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}$, la solution s'écrit

$$u(t,x) = \mathbb{E}(f(W_t^x)).$$

Ici W^x, t.q. $W_t^x = W_t + x$, est le processus brownien de C.I. non nulle, i.e. partant x à l'instant $t=0$.

Démonstration. Pour $t>0$ fixé et $s\in[0,t]$. On peut appliquer la formule de Itō au processus

$$Y_s = \phi(s, W_s^x) = u(t-s, W_s^x)$$

car ϕ suffisamment régulière par propriétés de u et $\mathrm{d}W_s^x = 0\mathrm{d}s + \mathrm{d}W_s$ avec $W_0^x = x$. Alors on a

$$\mathrm{d}Y_s = \partial_s\phi(s,W_s^x)\mathrm{d}s + \partial_x\phi(s,W_s^x)\cdot\mathrm{d}W_s + \frac{1}{2}\partial_{xx}^2\phi(s,W_s^x)\mathrm{d}s,$$

$$= \left(-\cancel{\partial_t u(t-s,W_s^x)\mathrm{d}s} + \partial_x u(t-s,W_s^x)\cdot\mathrm{d}W_s + \cancel{\frac{1}{2}\partial_{xx}^2 u(t-s,W_s^x)\mathrm{d}s}\right)$$

Cependant par l'EDP, on peut annuler un certain nombre de termes, ce qui donne

$$\mathrm{d}Y_s = \partial_x u(t-s,W_s^x)\cdot\mathrm{d}W_s$$

En intégrant par rapport à s de 0 à t on finit par obtenir

$$Y_t - Y_0 = \int_0^t \partial_x u(t-s,W_s^x)\cdot\mathrm{d}W_s$$

$$\Rightarrow f(W_t^x) - u(t,x) = \int_0^t \partial_x u(t-s,W_s^x)\cdot\mathrm{d}W_s \Rightarrow u(t,x) = \mathbb{E}(f(W_t^x)).$$

on note que l'intégrale stochastique à droite a du sens par les hypothèses sur le gradient. On déduit le résultat en prenant l'espérance et en utilisant les propriétés de l'intégrale stochastique. Ici $Y_0 = u(t-t,W_t^x) = u_0(W_t^x) = f(W_t^x)$ où $W_0^x = W_0 + x = x$. ■

Remarques.

— Il faut remarquer qu'on vient conditionner l'espérance en imposant que le processus démarre de x autrement dit $W_t^x = W_t + x$ ou encore $u(t,x) = \mathbb{E}(f(W_t^x)|W_0^x = x)$.

— ⚠Attention, ce n'est pas un théorème d'existence, mais simplement une propriété de la solution problème de Cauchy qui admet une représentation probabiliste pour peu que celle-ci soit suffisamment régulière !

— On peut généraliser (voir TD) ce résultat en introduisant un terme de dissipation dans l'équation i.e. $\partial_t u = \frac{1}{2}\partial_{xx}^2 u - ku$ avec k est bornée. Dans ce cas on obtient

$$u(t,x) = \mathbb{E}\left(f(W_t^x)\exp\left(-\int_0^t k(W_s^x)\mathrm{d}s\right)\right).$$

— Pour faire le lien entre l'équation de la chaleur et le mouvement brownien on a utilisé la densité de $x+W_t$ qui est explicitement donnée par une gaussienne. Dans le cas général, il est possible de faire le lien EDP-EDS par le biais de processus de diffusion régit par une EDS voir e.g. [1, 2, 5].

4.3 Stratégie numérique

Imaginons que l'on veuille calculer une approximation de u solution de (4.2.1) admettant la représentation probabiliste suivante

$$u(t,x) = \mathbb{E}\left(f(W_t^x)\right),$$

pour $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. On peut combiner une méthode de MC avec méthode de simulation adéquate pour simuler les trajectoires du mouvement brownien W.

Approximation.
Soit un maillage uniforme $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T$ de $[0,T]$, $t_n = n\Delta t, n = 0,1,\ldots$ et $\Delta t = \frac{T}{N}$, le mouvement brownien W_t^x est approché par $W_t^{x,\Delta t}$ t.q. la v.a. $W_{t_n}^{x,\Delta t} = W_n^x$ en tout instant t_n. W_n^x est le brownien simulé à l'instant t_n par une des méthodes introduites au Chapitre 1.
☞On peut interpréter la trajectoire du processus discret comme une façon de discrétiser en espace.

Pour calculer une approximation de $u(t,x)$ on écrit

$$u(t,x) \approx u^{\Delta t}(t,x) := \mathbb{E}(f(W_t^{x,\Delta t})).$$

Puis on calcule l'estimateur $u_M^{\Delta t}(t,x)$ de $u(t,x)$ en estimant l'espérance via un MC

$$\mathbb{E}(f(W_t^{x,\Delta t})) \approx \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} \mathbb{E}(f(W_t^{x,\Delta t}(\omega_m))$$

où $W_t^{x,\Delta t}(\omega_m)$ est la m-ième réalisation $W_t^{x,\Delta t}$.

Erreur d'approximation.
L'erreur que l'on commet en utilisant cette méthode est la suivante

$$u(t,x) - u_M^{\Delta t}(t,x) = \underbrace{\mathbb{E}(f(W_t^x)) - \mathbb{E}(f(W_t^{x,\Delta t}))}_{\text{erreur d'approximation de } W} + \underbrace{\mathbb{E}(f(W_t^{x,\Delta t})) - \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} \mathbb{E}(f(W_t^{x,\Delta t}(\omega_m))}_{\text{erreur statistique}}.$$

Il y a deux niveaux d'approximation introduisant deux types d'erreurs :
- l'une qui introduit une **erreur statistique** du au nombre de réalisations effectuée, mais qui converge par la loi des grands nombres quand $M \to \infty$.
- l'autre qui est liée à l' **erreur de discrétisation** pour le processus W, qui est sensée décroitre lors que $\Delta t \to 0$.

En pratique, l'idée est de choisir de façon optimale $\Delta t, M$ pour que les deux types d'erreur que l'on commet soient du même ordre !

Vers des méthodes de simulation "probabilistes"

On peut alors s'interroger sur l'intérêt de cette approche par rapport à une méthode de résolution déterministe par schéma de discrétisation de type EF, VF, DF...

Méthodes déterministes	**Méthodes de type Monte Carlo**
✓Evaluation globale de la solution u	✗Evaluation ponctuelle (regression, interpolation)
✓Convergence liée à $\Delta t, \Delta x$	✗Convergence lente M.C.
✓Maillage fin	✓Convergence inconditionnelle
✗Grande dimension (cond., CFL, mal. dim.)	✓Complexité $\sim$ pour le linéaire en grande dimension

Un méthode probabiliste ne permet que d'accèder à des valeurs ponctuelles de la solution et non dans sa globalité (il faut alors envisager une reconstruction globale via une méthode d'interpolation ou de moindres carrés). Par ailleurs, la méthode de MC peut converger très lentement en fonction de M en effet dans ce cas l'erreur au carré se comporte comme $\mathbb{V}(u_M^{\Delta t}(x,t))/M$ et elle dépend de surcroit de la variance de l'estimateur. On peut introduire des méthodes de réduction de variance : méthode d'échantillonnage antithétique, méthodes adaptatives (voir [2]) ou encore des méthodes de MC multi-niveaux.

Chapitre 5

Notations et conventions

5.1 Abbréviations

- *v.a.* : variable aléatoire
- *i.i.d* : indépendantes et identiquement distribuées
- *m.b.s.* : mouvement brownien standard
- *p.s.* presque sûrement
- *p.p.* presque partout

5.2 Notations

- $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ espace de probabilité avec Ω univers, $\mathcal{M}$ tribu et $\mathbb{P}$ mesure de probabilité.
- Etant donnés x, y dans $\mathbb{R}^d$, $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^d x_i^2\right)^{1/2}$ est la norme canonique de x induite par le produit scalaire $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^d x_i y_i$.
- Etant donnés A, B dans $\mathbb{R}^{n\times m}$, $\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m A_{ij}^2\right)^{1/2}$ est la norme de Frobenius de A induite par le produit scalaire $\langle A, B\rangle_F = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m A_{ij}B_{ij}$.
- X v.a. de loi $\mathcal{L}(\theta)$ est noté $X \sim \mathcal{L}(\theta)$.
- Une suite de v.a. $\{X_n\}_{n\geq 0}$ convergente en loi vers $\mathcal{L}(\theta)$ est notée $X_n \underset{n\to\infty}{\sim} \mathcal{L}(\theta)$. Soit $X \sim \mathcal{L}(\theta)$ on note aussi la convergence en loi $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} X$.
- Une suite de v.a. $\{X_n\}_{n\geq 0}$ convergente en probabilité vers X est notée $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X$.
- Une suite de v.a. $\{X_n\}_{n\geq 0}$ convergente presque surement vers X est notée $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} X$.
- Une suite de v.a. $\{X_n\}_{n\geq 0}$ convergente presque en moment d'ordre 2 vers X est notée $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{L}^2} X$ ou de façon equivalente $\mathbb{E}(\|X_n - X\|^2) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

5.3 Tribus, variables aléatoires et espérance conditionnelle

Soit Ω un ensemble et $\mathcal{F}$ un ensemble de sous ensembles de Ω est une **tribu** sur Ω si :
- $\emptyset \subset \mathcal{F}$,
- si $A \in \mathcal{F}$ alors $\Omega \setminus A \in \mathcal{F}$,
- si $\{A_n\}_{n\geq 1} \in \mathcal{F}$ alors $\cup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{F}$.

Une **sous-tribu** $\mathcal{E}$ de $\mathcal{F}$ est une tribu telle que $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité où Ω est un ensemble, $\mathcal{M}$ une tribu définie sur Ω et $\mathbb{P}$ une mesure de probabilités. Une **variable aléatoire (v.a.)** à valeurs réelles $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)), d \geq 1$, est une **fonction mesurable** c-à-d que pour tout borélien $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \in B\}$$

aussi noté $\{X \in B\}$ appartient à $\mathcal{M}$. On note $\mathbb{E}(X)$ **l'espérance de** X définie par

$$\mathbb{E}(X) = \int_\Omega X d\mathbb{P}.$$

La **tribu engendrée par** X est la tribu notée $\sigma(X)$ définie par

$$\sigma(X) = \{X \in B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\} \subset \mathcal{M}$$

c'est la plus petite sous tribu de $\mathcal{M}$ rendant X mesurable.

Espérance conditionnelle

Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles définie sur l'espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}$ une sous tribu. On suppose que X est intégrable, i.e. $\mathbb{E}(|X|) < \infty$.

Alors **l'espérance conditionnelle de** X **par rapport à la tribu** $\mathcal{F}$ est la variable aléatoire Y $\mathcal{F}$-mesurable t.q.

$$\mathbb{E}(XU) = \mathbb{E}(YU) \text{ pour toute v.a. } U \quad \mathcal{F} - \text{mesurable.}$$

On note la variable aléatoire $Y = \mathbb{E}(X|\mathcal{F})$. On rappelle les propriétés de l'espérance conditionnelle par rapport à la sous tribu $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}$. et pour tout variable aléatoire X.

1. $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F})) = \mathbb{E}(X)$.
2. Pour tout a, b réels on a $\mathbb{E}(aX + bY|\mathcal{F}) = a\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) + b\mathbb{E}(Y|\mathcal{F})$.
3. Si $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ alors $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F})|\mathcal{E}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{E})$ et $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{E})|\mathcal{F}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{E})$.
4. Si $X \leq Y$ p.s. alors $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) \leq \mathbb{E}(Y|\mathcal{F})$.
5. Si X est une variable aléatoire intégrable et indépendante de $\mathcal{F}$ alors $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) = \mathbb{E}(X)$.

Par ailleurs, étant données deux variables aléatoires X, Y définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On définit **l'espérance conditionnelle de** Y **par rapport à** X comme l'espérance conditionnelle de Y par rapport à la tribu $\sigma(X)$ i.e.

$$\mathbb{E}(Y|X) = \mathbb{E}(Y|\sigma(X)).$$

Les propriétés précédentes sont toujours vérifiées et on a pour tout Z $\sigma(X)$-mesurable,

1. $\mathbb{E}(Z|X) = \mathbb{E}(Z|\sigma(X)) = Z$.
2. $\mathbb{E}(ZY|X) = \mathbb{E}(ZY|\sigma(X)) = Z\mathbb{E}(Y|\sigma(X))$.

Bibliographie

[1] Francis Comets and Thierry Meyre. Calcul stochastique et modèles de diffusions. May 2020.

[2] E. Gobet. Méthodes de Monte-Carlo et processus stochastiques : du linéaire au non-linéaire. Editions de l'Ecole Polytechnique, 2013.

[3] Gabriel J. Lord, Catherine E. Powell, and Tony Shardlow. An Introduction to Computational Stochastic PDEs. Cambridge University Press, Cambridge, England, UK, July 2014.

[4] Alfio Quarteroni, Riccardo Sacco, and Fausto Saleri. Numerical Mathematics. Springer, Berlin, Germany, 2007.

[5] Julien Reygner. Méthodes numériques probabilistes, Notes de cours. 2024.